Operatore di evoluzione temporale
e
Teorema di Wick

Operatore di evoluzione temporale

$$|\Psi_I(t)\rangle = U(t,t_0)|\Psi_I(t_0)\rangle$$ **definizione**

$$\begin{aligned}|\Psi_I(t)\rangle &= e^{i\frac{H_0 t}{\hbar}}|\Psi_S(t)\rangle = e^{i\frac{H_0 t}{\hbar}}e^{-i\frac{H}{\hbar}(t-t_0)}|\Psi_S(t_0)\rangle \\ &= e^{i\frac{H_0 t}{\hbar}}e^{-i\frac{H}{\hbar}(t-t_0)}e^{-i\frac{H_0 t_0}{\hbar}}|\Psi_I(t_0)\rangle\end{aligned}$$

$$\boxed{U(t,t_0) = e^{i\frac{H_0 t}{\hbar}}e^{-i\frac{H(t-t_0)}{\hbar}}e^{-i\frac{H_0 t_0}{\hbar}}}$$

$U^{-1}(t,t_0)$

alcune proprietà: $$\begin{cases} U(t_0,t_0) = 1 \\ U^+(t,t_0)U(t,t_0) = U(t,t_0)U^+(t,t_0) = 1 \\ U(t_1,t_2)U(t_2,t_3) = U(t_1,t_3) \end{cases}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi_I(t)\rangle = H_1(t)|\Psi_I(t)\rangle \quad \Rightarrow \quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0)|\Psi_I(t_0)\rangle = H_1(t)U(t,t_0)|\Psi_I(t_0)\rangle$$

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0) = H_1(t)U(t,t_0)}$$

Operatore di evoluzione temporale

integrando da t_0 a t $\quad U(t,t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} dt' H_1(t')U(t',t_0)$

$$
\begin{aligned}
U(t,t_0) &= 1 - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} dt' H_1(t')\left[1 - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t'} dt'' H_1(t'')[1 - \ldots]\right] \\
U(t,t_0) &= 1 - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} dt' H_1(t') + (\frac{-i}{\hbar})^2 \boxed{\int_{t_0}^{t} dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' H_1(t')H_1(t'')} + \ldots
\end{aligned}
$$

$t > t'$

$$
\int_{t_0}^{t} dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' H_1(t')H_1(t'') = 1/2 \underbrace{\int_{t_0}^{t} dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' H_1(t')H_1(t'')}_{t' > t''} + 1/2 \underbrace{\int_{t_0}^{t} dt'' \int_{t_0}^{t''} dt' H_1(t'')H_1(t')}_{t'' > t'}
$$

(ved. Fetter-Walecka, pgs 54-58)

Operatore di evoluzione temporale

$$\int_{t_0}^{t} dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' H_1(t')H_1(t'') =$$

$$1/2 \quad \int_{t_0}^{t} dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' H_1(t')H_1(t'') + 1/2 \int_{t_0}^{t} dt' \int_{t'}^{t} dt'' H_1(t'')H_1(t') =$$

$$1/2 \quad \int_{t_0}^{t} dt' \int_{t_0}^{t} dt'' \left[H_1(t')H_1(t'')\theta(t'-t'') + H_1(t'')H_1(t')\theta(t''-t')\right] =$$

$$1/2 \quad \int_{t_0}^{t} dt' \int_{t_0}^{t} dt'' T\left[H_1(t')H_1(t'')\right]$$

Θ funzione gradino

$$\boxed{U(t,t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^n \frac{1}{n!} \int_{t_0}^{t} dt_1 \ldots \int_{t_0}^{t} dt_n T\left[H_1,(t_1)\ldots H_1(t_n)\right]}$$

T operatore di ordinamento temporale:
riordina gli operatori in ordine di tempo decrescente da sinistra a destra

Operatore di evoluzione temporale

Accensione adiabatica dell'interazione: *descrive autostati di un sistema di particelle interagenti in termini di autostati di un sistema di particelle non interagenti*

$$H = H_0 + e^{-\epsilon|t|} H_1$$

$$\lim_{t \to 0} H = H_0 + H_1$$

$$\lim_{t \to \pm\infty} H = H_0$$

$$|\Psi_I(t)\rangle = U_\epsilon(t, t_0)|\Psi_I(t_0)\rangle$$

I risultati devono essere indipendenti da ε

$$U_\epsilon(t, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^n \frac{1}{n!} \int_{t_0}^{t} dt_1 \ldots \int_{t_0}^{t} dt_n \; e^{-\epsilon|[t_1|+|t_2|+\ldots]} T[H_1(t_1) \ldots H_1(t_n)]$$

Operatore di evoluzione temporale

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi_I(t)\rangle = H_1(t)|\Psi_I(t)\rangle \quad \longrightarrow \quad \boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi_I(t)\rangle = e^{-\epsilon|t|}H_1(t)|\Psi_I(t)\rangle \rightarrow_{t\rightarrow\pm\infty} 0}$$

$$|\Psi_I(t)\rangle = U_\epsilon(t,-\infty)|\Phi_0\rangle$$

Nel limite per $t \Rightarrow \pm\infty$ l'Hamiltoniana si riduce a H_0

Se non ci fosse l'interazione, $|\psi_I\rangle$ sarebbe sempre uguale a $|\varphi_0\rangle$

Al crescere del tempo l'interazione viene accesa, fino a t = 0 quando è completamente accesa.

$$\begin{aligned}
|\Psi_H(t)\rangle_{t\rightarrow 0} = \lim_{t\rightarrow 0} e^{i\frac{Ht}{\hbar}}|\Psi_S(t)\rangle &= |\Psi_S(0)\rangle \\
|\Psi_I(t)\rangle_{t\rightarrow 0} = \lim_{t\rightarrow 0} e^{i\frac{H_0 t}{\hbar}}|\Psi_S(t)\rangle &= |\Psi_S(0)\rangle \\
|\Psi_H(0)\rangle = |\Psi_I(0)\rangle &= |\Psi_S(0)\rangle
\end{aligned}$$

Operatore di evoluzione temporale

$$
\begin{aligned}
|\Psi_H(t)\rangle_{t\to 0} = \lim_{t\to 0} e^{i\frac{Ht}{\hbar}} |\Psi_S(t)\rangle &= |\Psi_S(0)\rangle \\
|\Psi_I(t)\rangle_{t\to 0} = \lim_{t\to 0} e^{i\frac{H_0 t}{\hbar}} |\Psi_S(t)\rangle &= |\Psi_S(0)\rangle \\
|\Psi_H(0)\rangle = |\Psi_I(0)\rangle &= |\Psi_S(0)\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{|\Psi_H(0)\rangle = |\Psi_I(0)\rangle = U_\epsilon(0,-\infty)|\Phi_0\rangle}
$$

L'equazione esprime l'autostato di un sistema interagente in termini di un autostato di un sistema non interagente H_0. Il risultato ottenuto sarà significativo dal punto di vista della fisica se il $\lim_{\varepsilon\to 0}$ sarà finito.

Teorema di Wick

T operatore di ordinamento temporale $T[ABC\ldots]$

se $t_{n+1} > t_n$

$$
\begin{aligned}
T\left[a(t_3)a^+(t_1)a^+(t_2)\right] &= -a(t_3)a^+(t_2)a^+(t_1) \\
T\left[a(t_2)a^+(t_1)a^+(t_3)\right] &= a^+(t_3)a(t_2)a^+(t_1)
\end{aligned}
$$

Prodotto ordinato normale N: *ordina gli operatori in modo tale che il valore di aspettazione sul vuoto sia nullo*

operatori di creazione	*operatori di distruzione*
$\langle 0 \vert a^+ = 0$	$a \vert 0 \rangle = 0$

$$N[a_1 a_2^+ a_3 a_4^+] = -a_2^+ a_4^+ a_1 a_3$$

Teorema di Wick

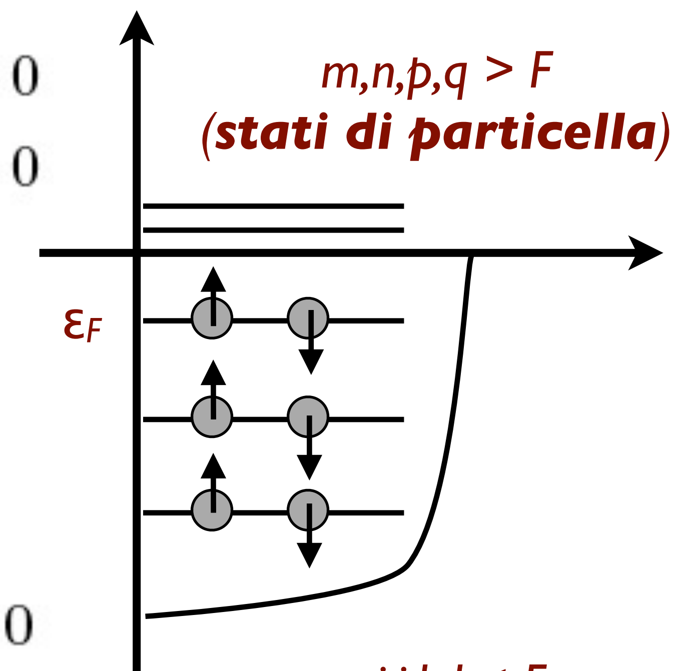
Prodotto ordinato normale N: *ordina gli operatori in modo tale che il valore di aspettazione sul vuoto sia nullo. Si possono definire diversi tipi di vuoto.*

$$|0\rangle \longrightarrow |\Phi_0\rangle$$

stato fondamentale in cui tutti gli stati di minor energia sono occupati fino al livello di Fermi

$$a_m|\Phi_0\rangle = 0$$
$$a_m^+|\Phi_0\rangle \neq 0$$

m,n,p,q > F
(***stati di particella***)



$$N[a_m a_j^+ a_j a_m^+] = \quad a_j a_m^+ a_m a_j^+$$

Il valore di aspettazione nello stato Φ_0 è nullo

$$a_j|\Phi_0\rangle \neq 0$$
$$a_j^+|\Phi_0\rangle = 0$$

i,j,k,l < F
(***stati di lacuna***)

Teorema di Wick

Contrazione: $$A^{\alpha} B^{\alpha} \equiv T[AB] - N[AB]$$

Esempio: se gli operatori sono definiti allo stesso tempo T[...] = [...]

$$a_m^{+\alpha} a_i^{\alpha} = T[a_m^+ a_i] - N[a_m^+ a_i] = a_m^+ a_i - a_m^+ a_i = 0$$

il risultato non è un operatore ma un ***numero complesso***

Si può dimostrare che l'operazione di contrazione equivale al valore di aspettazione sul vuoto

$$\langle \Phi_0 | AB | \Phi_0 \rangle = \langle \Phi_0 | A^{\alpha} B^{\alpha} | \Phi_0 \rangle + \langle \Phi_0 | \underbrace{N[AB]}_{=\,0} | \Phi_0 \rangle = A^{\alpha} B^{\alpha} \langle \Phi_0 | \Phi_0 \rangle$$

$\langle \Phi_0 | T[AB] | \Phi_0 \rangle$

Con più di due operatori bisogna considerare le permutazioni necessarie...

$$A^{\alpha} B^{\beta} C^{\alpha} D E F^{\beta} = -A^{\alpha} C^{\alpha} B^{\beta} F^{\beta} D E$$

Teorema di Wick

Il ***teorema di Wick*** *afferma che un prodotto di operatori può essere scritto come somma di prodotti normali ordinati in cui tutte le possibili contrazioni sono effettuate*

$$
\begin{aligned}
T[ABC\ldots Z] = N[ABC\ldots Z] \quad &+ \quad N[A^{\alpha}B^{\alpha}\ldots Z] + N[A^{\alpha}BC^{\alpha}\ldots Z] \\
&+ \quad N[A^{\alpha}B^{\alpha}C^{\beta}\ldots Z] + N[A^{\alpha}B^{\beta}C^{\alpha}\ldots Z] \\
&+ \quad N[A^{\alpha}B^{\alpha}C^{\beta}\ldots Z] + .
\end{aligned}
$$

Teorema di Wick

Esempio:

$$
\begin{aligned}
ABCD = N[ABCD] \quad &+ \quad N[A^\alpha B^\alpha CD] + N[A^\alpha BC^\alpha D] + N[A^\alpha BCD^\alpha] \\
&+ \quad N[AB^\alpha C^\alpha D] + N[A^\alpha BCD^\alpha] + N[ABC^\alpha D^\alpha] \\
&+ \quad N[A^\alpha B^\alpha C^\beta D^\beta] + N[A^\alpha B^\beta C^\alpha D^\beta] + N[A^\alpha B^\beta C^\beta D^\alpha] = \\
= N[ABCD] \quad &+ \quad A^\alpha B^\alpha N[CD] - A^\alpha C^\alpha N[BD] + A^\alpha D^\alpha N[BC] \\
&+ \quad B^\alpha C^\alpha N[AD] - B^\alpha D^\alpha N[AC] + C^\alpha D^\alpha N[AB] \\
&+ \quad A^\alpha B^\alpha C^\beta D^\beta - A^\alpha C^\alpha B^\beta D^\beta + A^\alpha D^\alpha B^\beta C^\beta
\end{aligned}
$$

il valore di aspettazione di questi operatori rispetto allo stato fondamentale è ridotto al solo calcolo delle contrazioni; per definizione i valori di aspettazione dei termini contenenti N sono nulli